Concorsi a Cattedra

Tracce ufficiali dei concorsi
Ambito: Matematica e fisica

A20 Fisica (ex 38/A)
A26 Matematica (ex 47/A)
A27 Matematica e fisica (ex 49/A)
A47 Scienze Matematiche applicate (ex 48/A)

Il presente documento contiene tutte le tracce ufficiali somministrate ai candidati in occasione delle selezioni concorsuali dell'ambito Matematica e Fisica

A20 Fisica (ex 38/A)

Concorso ordinario 1982

1. Limiti della meccanica newtoniana per velocità prossime a quella della luce
2. Entropia e probabilità
3. I modelli atomici

Concorso ordinario 1984

1. Lo spettro di corpo nero e la costante di Planck
2. Conduttori e semiconduttori: caratteristiche sia macroscopiche che microscopiche
3. Interazione tra osservatore e sistema osservato: il principio di indeterminazione

Concorso ordinario 1990

1. Analogie tra il flusso di un fluido in una condotta e la corrente elettrica in un conduttore elettrico
2. Gli spettri dei gas
3. L'equazione di Schroedinger: teoria e applicazioni

prova scritta FISICA valida per A038 e A049

QUESITO 1

La legge di gravitazione universale di Newton spiega il moto planetario. Si discutano la consistenza della legge di gravitazione universale con le leggi di Keplero e la forma, derivandola, della energia potenziale gravitazionale. Si dia l'ordine di grandezza della massa del Sole sapendo che G=6.67x 10^{-11} N m^2 / kg^2 e che il raggio dell'orbita terrestre è di 1.5 x 10^8 km.

QUESITO 2

Un condensatore è un sistema in grado di immagazzinare cariche elettriche ed energia. Si discutano in assenza e in presenza di materiale dielettrico, il campo elettrico, la capacità elettrica e l'energia immagazzinata in un condensatore piano parallelo. Si descriva almeno un'utilizzazione del condensatore in ambito scientifico o tecnologico.

QUESITO 3

Nell'ambito della termodinamica dei gas perfetti, si discutano alcuni esempi di macchine termiche, il loro rendimento e gli enunciati del secondo principio della Termodinamica.

A26 Matematica (ex 47/A)

Concorso ordinario 1982

1) Si studino le curve soluzioni dell'equazione differenziale

$$\left(1-3x^2\right)dx-\left(1-3y^2\right)dy=0$$

mettendo in rilievo le simmetrie di ciascuna curva e della famiglia delle curve nel suo complesso.

2) A. Si studi la curva C di equazione

$$x^4+y^4-y\left(x^2+y^2\right)=0$$

verificando che la sua parte reale è contenuta in un rettangolo.

B. Si determini, tra i triangoti inscritti in C, aventi un vertice nel punto A(0, 1) ed il lato opposto parallelo alla tangente a C in A, quello di area massima.
C. Si calcoli il volume del solido che si ottiene facendo ruotare nello spazio, di coordinate *x, y, z,* la regione di piano delimitata da **C** di mezzo giro attorno al suo asse di simmetria.

3) A. Si scriva lo sviluppo di Taylor della funzione

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

in serie di potenze di x e si determini il raggio di convergenza di tale sviluppo.
B. Si commenti il risultato ottenuto osservando che r è finito, pur essendo la funzione $f(x)$ analitica su tutto l'asse reale.
C. Si considerino i polinomi della forma $P(x) = a + bx^2$
e si determinino i coefficienti **a, b** in modo tale che il valore dell'integrale

$$\int_{-1}^{1}\left[\mathbf{f(x)-P(x)}\right]^2 \mathbf{dx}$$

risulti minimo.

D. Tenendo presente che sia il polinomio $P(x)$ che lo sviluppo di Taylor, troncato al termine di grado due, rappresentano due diversi metodi di approssimazione polinomiale della funzione $f(x)$, si illustrino i loro significati e si confrontino le diverse utilizzazioni.

1) In un sistema di assi coordinati ortogonali Oxy è dato, per ogni intero positivo $\underline{n}$, l'insieme

$$E_n = \{(x, y); x^{2n} + y^{2n}\} < 1$$

A. Si dimostri che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{E_n} = \mathbf{Q}$$

dove si è posto

$$\mathbf{Q = \{ (x, y); (x) < 1, (y) < 1\}} .$$

B. Si determini un intero $\mathbf{n_o}$ tale che risulti, per ogni $\mathbf{n > n_o}$,

$$\mathbf{E_n :\supset Q_o},$$

dove si è posto

$$\mathbf{Q_o = \{ (x, y); (x) < 0{,}99; (y) < 0{,}99\}}$$

C. Indicata con $\mathbf{L_n}$ la lunghezza della curva chiusa

$$\mathbf{x^{2n} + y^{2n} = 1},$$

per ogni intero positivo $\underline{\mathbf{n}}$, si dimostri che $\mathbf{L_n \leq 8}$ e che

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{L_n = 8}.$$

D. Nello spazio, di coordinate ortogonali **x**, **y**, **z**, si calcoli il volume **V** del solido

$$\mathbf{K = \{ (x, y, Z); x^4 + y^4 \quad 1, x \ \geq 0, y \geq 0,}$$

$$0 \leq z \leq \frac{x}{\sqrt{1 + y^2}}$$

2) In un sistema di assi coordinati ortogonali Oxy sono date la parabole di equazione

$$x^2 - y^2 = 0$$

e la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0 \qquad (r > 0).$$

Si studi il luogo dei baricentri dei triangoli che hanno un vertice in 0 e gli altri due vertici, dei quali uno sulla parabola e l'altro sulla circonferenza, su una retta parallela alla tangente nel vertice alla parabola.

3) A. Date, in un piano, una circonferenza C di centro 0 ed una retta r passante per 0, si trovi la totalità T delle parabole bitangenti a C ed aventi per asse la retta r. Detta S la regione finita di piano delimitata da una parabola di T e dalla sua simmetrica rispetto alla perpendicolare ad r passante per 0, si determini la regione S_o di area minima. Si calcolino l'area A di S_o e la lunghezza di L del suo contorno. B. Si consideri. il solido K ottenuto facendo ruotare la regione S attorno all'asse di simmetria delle parabole di T e si determini il solido K_1 di volume minimo. Si dica se questo solido K_1 coincide con il solido K_o ottenuto facendo ruotare nel modo detto la regione S_o di area minima. Si calcoli il volume V del solido K_1. D. Si diano espressioni decimali approssimate a meno di 0,01 per i valori trovati di L e di V, giustificando opportunamente i passaggi effettuati (arrotondamenti, maggiorazioni d'errore, ecc.).

Concorso ordinario 1990

1) In un piano P è dato un sistema di assi coordinati ortogonali monometrici, di origine O. Un punto qualunque del piano M(x, y) può essere rappresentato con un numero complesso $z = x + iy$, chiamato affissa di M. Sia z^* il complesso coniugato di z.

- Dato un numero complesso a, diverso da zero, considerare l'applicazione φ_a del piano P privato dell'origine, in se stesso, che ad ogni punto M di affissa z fa corrispondere M' di affissa $z' = a/ z^*$. Dire se tale applicazione è o no biiettiva. Determinare l'insieme dei punti invarianti dell'applicazione φ_a, al variare di a.
- L'applicazione composta $\varphi_b * \varphi_a$, essendo b ed a due numeri complessi non nulli, rappresenta una trasformazione geometrica del piano P: dire di quale trasformazione si tratta. Esaminare in particolare il caso b = a.

- Nel seguito del problema sia a un reale strettamente positivo; dimostrare che, in tale caso, la φ_a è una involuzione. Esprimere, in questo caso, le equazioni della trasformazione φ_a, che manda M(x,y) in M'(x',y') e scriverne le trasformazioni inverse. Mostrare che la φ_a è una trasformazione quadratica, della quale si dovrà mettere in evidenza qualche proprietà.
- I numeri complessi z e z', affisse di M e di M', siano espressi nella forma trigonometrica: $z = r (\cos\theta + i \sin\theta')$, $z' = r' (\cos\theta' + i \sin\theta')$; esprimere r' e θ' in funzione di r e θ.
- Sia Γ una circonferenza passante per O e avente centro in un punto C (c,0) dell'asse delle ascisse. Determinare l'immagine data dalla trasformazione φ_a della circonferenza Γ, privata del punto O.
- Data la curva H di equazione $x^2 - y^2 + 2x = 0$, mostrare che si tratta di un'iperbole; determinarne centro, assi, vertici, fuochi, asintoti.
- Nell'applicazione considerata nelle domande precedenti porre a = 1. Sia K l'immagine di H data dalla φ_1 : mostrare che K è una cubica circolare; esaminarne le singolarità e farne una rappresentazione grafica. In particolare, trovare le tangenti alla K nell'origine e nell'ulteriore punto di intersezione con l'asse delle ascisse.
- Trattare le trasformazioni quadratiche, in particolare l'inversione per raggi vettori reciproci.

2) Indicare con **P(a,r)** la progressione aritmetica di ragione **r** 0 e di primo termine **a**, con S_n, la somma dei primi **n** termini della progressione, con T_n la somma dei quadrati dei primi **n** termini. - Scelti **p** e **q** numeri reali, dire se esiste una progressione **P(a,r)** tale che: $S_n = p\, n^2 + q\, n$. In caso affermativo calcolare **a** ed **r** in funzione di **p** e di **q**. In particolare, calcolare **a** ed **r** per **p = 3** e **q = 5**.

- Calcolare la somma Σ_n, dei quadrati dei numeri interi consecutivi da **1** ad **n** (si potrà considerare lo sviluppo di $(x + 1)^3$ dando ad **x** i valori **1, 2, 3, ... n**, e addizionando membro a membro le uguaglianze ottenute).

Dedurre una espressione di T_n per una progressione **P(a,r)**, in funzione di **a**, **r** ed **n**. In particolare, calcolare la somma dei quadrati dei primi **n** numeri interi dispari.

- Quale condizione devono verificare i numeri **b**, **c** e **d** affinché esista una **P(a,r)** tale che $T_n = b\, n^3 + c\, n^2 + d\, n$?

- Trattare l'insieme ℕ dei numeri naturali.

3) In un piano euclideo riferito ad un sistema di assi coordinati ortogonali monometrici di origine **O**, considerare la trasformazione **h** che al punto **M(x,y)** associa **M'(X,Y)** tale che:

$$\begin{cases} x = x - y + 1 \\ y = x + y \end{cases}$$

Mostrare che **h** è una similitudine piana diretta della quale si preciseranno gli elementi.

- Studiare la conica **C** di equazione

$x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y = 0$.

Determinare l'equazione cartesiana della curva **C'**, immagine della curva **C** data dalla trasformazione **h**; trovare le caratteristiche (fuoco, direttrice, vertice) e rappresentare le curve **C** e **C'**

- Considerare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x - t}}\, dt$$

essendo **f(t)** una funzione definita sull'insieme dei numeri reali. Trovare il dominio di definizione e studiare la continuità e la derivabilità di **F(x)**.

Determinare il comportamento di **F(x)** per **x** tendente a più infinito quando si suppone l'esistenza di $L = \lim_{x \to +\infty} f(x) / x$.

- Trattare le ipotesi del continuo.

Durata massima della prova: ore otto.

E' consentito soltanto l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

È fatto divieto di svolgere più di un solo tema, pena l'annullamento della prova.

Concorso riservato 1983 (art. 35)

Il candidato, sotto forma di lezione e privilegiandone l'aspetto metodologico-didattico con riguardo agli alunni cui la lezione stessa sarebbe destinata, tratti di uno dei seguenti argomenti:

1. I numeri reali

2. Scomposizione di un polinomio in fattori

3. La circonferenza

4. Relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo

5. Massimi e minimi delle funzioni

Concorso riservato 1983 (art. 76)

1. La divisione dei polinomi e la regola di Ruffini

2. Equivalenza nel piano o nello spazio

3. Punti notevoli dei triangoli

4. Potenza di un binomio

5. Applicazioni dell'integrale definit

Concorso riservato 1988

Il candidato tratti, sotto forma di lezione, uno dei seguenti argomenti, privilegiandone l'aspetto metodologico-didattico con riguardo agli alunni cui la lezione stessa sarebbe destinata:

1. Equazione della parabola nel piano cartesiano

2. La congruenza dei triangoli

3. La rettificazione della circonferenza

4. Il principio di Cavalieri e sue applicazioni

5. La derivata di una funzione e sue applicazioni

6. I radicali

A26 Matematica (ex 47/A)
A27 Matematica e fisica (ex 49/A)

Concorso ordinario 2000

MATEMATICA

Il candidato svolga, a scelta, uno dei seguenti gruppi di quesiti:

Gruppo 1

- Nel piano sono dati: il cerchio g di diametro AB, la retta t tangente ad esso in B, una retta r passante per A, i punti C, D intersezione di r rispettivamente con g e t. Al variare di r. i punti P di essa per i quali è AP=CD (in valore e segno) descrivono la notissima *cissoide di Diocle*. Il candidato dopo averne esplicitato le equazioni - parametriche, cartesiana e polare - e calcolato le aree che essa delimita sia con il cerchio g sia con l'asintoto si soffermi sull'utilizzo fattone da Diocle per duplicare il cubo. In ordine a tale ultima questione chiarisca il significato di problema *classico dell'antichità* e la visione più attuale di *risolubilità* di un problema.
- Insiemi infiniti e confronto tra essi. Il candidato illustri: i metodi diagonali di Cantor e l'ipotesi del continuo; la cardinalità dei numeri algebrici e dei numeri trascendenti. Fornisca esempi di numeri trascendenti.
- Il metodo di Newton per il calcolo delle radici di una equazione. Il candidato lo illustri e lo utilizzi per il calcolo della radice quadrata di un numero positivo *a*. Codifichi infine in un linguaggio di programmazione la procedura seguita.
- Il teorema di Talete: enunciato e dimostrazione. Si esponga una organizzazione didattica di contenuti ad esso collegabili.

Gruppo 2

- La formula di Taylor: il candidato ne ponga in risalto l'utilità nelle applicazioni ed in particolare nel calcolo approssimato. Ne sottolinei l'importanza didattica attraverso la molteplicità dei risultati matematici che in essa si possono leggere. Si soffermi infine sulla solidarietà locale-globale da essa stabilita per i polinomi
- Il candidato dopo aver dimostrato ***l'infinità dei numeri primi*** illustri il problema della loro distribuzione e del comportamento asintotico della funzione *p* (*n*) che dà il numero dei primi compresi tra 2 e n. Enunci infine qualcuno dei problemi ancora irrisolti sui numeri primi.
- L'equivalenza delle figure piane: il candidato esponga le linee essenziali di una organizzazione didattica dell'argomento. Dimostri la formula di Erone per l'area di un triangolo e precisi la validità della formula

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

per l'area di un quadrilatero (*p* è il semiperimetro e *a,b,c,d* le misure dei lati).

- Il candidato valuti la probabilità che in sei lanci due dadi diano la somma 9 almeno due volte. Con riferimento alle diverse definizioni di probabilità, dia un suo commento critico alla nota affermazione: *"Probability does not exist (la probabilità non esiste)"*, dovuta a Bruno de Finetti.

Gruppo 3

- Una delle curve più famose è certamente la *cicloide* definita altresì l'" *Hélène de la géométrie*". Il candidato spieghi in che cosa essa consista; ne derivi (per la *cicloide ordinaria*) le equazioni e le misure delle grandezze più significative. Ne chiarisca infine le proprietà di *tautocrona* e di *brachistocrona*.
- Della formula:

$$e^{i\pi}+1=0$$

il candidato esponga uno o più itinerari di dimostrazione motivandone didatticamente le assunzioni di partenza. Del numero p riporti sinteticamente i momenti salienti della sua storia e taluni dei metodi, elementari e non, per il suo calcolo.

- La sezione aurea di un segmento: definizione e sua costruzione geometrica; l'interesse storico ed artistico; il legame con la serie di Fibonacci. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si calcoli senx e cosx per x = 18° e x = 54°.

- Il candidato indichi una strategia numerica per l'approssimazione dell'integrale:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

con una precisione fissata ed illustri la relazione che intercorre tra la funzione integranda e la funzione di *distribuzione gaussiana* (o *distribuzione normale*) *di probabilità.*

FISICA

Il candidato svolga, a scelta, uno dei seguenti temi:

- Tipi di forze esistenti in natura ed evoluzione del concetto d'interazione, dall'azione a distanza al modello quantistico di campo. Il candidato affronti l'argomento indicando anche le linee essenziali di una utilizzazione didattica in una classe a sua scelta. Proponga inoltre due problemi significativi dal punto di vista didattico, con relativa guida alla risoluzione, oppure la descrizione e spiegazione di una possibile esperienza di laboratorio.

- Le correnti parassite. Spiegazione scientifica e applicazioni più comuni in campo tecnologico.

Il candidato sviluppi l'argomento, indicando anche le linee essenziali di una utilizzazione didattica in una classe a sua scelta.
Proponga inoltre due problemi significativi dal punto di vista didattico, con relativa guida alla risoluzione, oppure la descrizione e spiegazione di una possibile esperienza di laboratorio.

- Lo sviluppo del settore dell'accelerazione delle particelle elementari.

Il candidato, dopo aver effettuato una ricostruzione sintetica per tappe significative si soffermi su una tipologia particolare di particelle, contestualizzandola in rapporto alla evoluzione della tecnica e delle tecnologie e illustrando almeno una applicazione di interesse umanitario. Descriva infine un possibile approccio didattico alla tematica in una classe a sua scelta, definendo le linee del percorso prefigurato.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

prova scritta MATEMATICA valida per A047 e A049

QUESITO 1

Si mostri che per ogni polinomio $P(x)$ di grado dispari e per ogni numero reale k esiste almeno una soluzione reale x dell'equazione $P(x) = k$. Si disegni poi il grafico qualitativo della funzione $f(x) = 4x^5 - 5x$, definita sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, e si stabilisca il numero degli elementi dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = k\}$, in dipendenza dal valore di $k \in \mathbb{R}$. Utilizzando le proprietà delle funzioni continue e delle funzioni derivabili si diano motivazioni rigorose per le affermazioni che vengono fatte.

QUESITO 2

Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

e si diano una descrizione algebrica e una interpretazione geometrica dell'insieme delle soluzioni di ciascuna equazione e del sistema. Si scriva una equazione lineare nelle incognite x, y, z, diversa da quelle scritte sopra, che, aggiunta al sistema, ne lascia invariato l'insieme delle soluzioni. Si scriva inoltre una equazione lineare nelle incognite x, y, z che aggiunta al sistema iniziale lo rende impossibile (ossia non ci sono terne (x, y, z) che soddisfano le due equazioni iniziali e anche quella aggiunta). Si dia una interpretazione geometrica dell'equazione che si è aggiunta, in ciascuno dei due casi indicati.

QUESITO 3

Si definiscano la divisione con resto tra i polinomi a coefficienti reali e la divisione con resto tra gli interi, mettendo in luce le analogie tra le due situazioni. Si descriva l'algoritmo di Euclide per la determinazione del massimo divisore comune di due interi e si spieghi perché produce in effetti il MCD. Si indichino possibili motivazioni, applicazioni, attività di laboratorio, riferimenti all'origine storica dell'algoritmo nella misura delle grandezze

Pag. 1

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

prova scritta MATEMATICA valida per A047 e A049

QUESITO 4

Fissato un numero $\sigma > 0$, si consideri la funzione distribuzione *gaussiana* (o *normale*)

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, della quale si assume noto che $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$.

1. Si disegni il grafico qualitativo della funzione g indicando la posizione dei flessi.
2. Si disegni il grafico qualitativo della funzione
$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$$
3. Si mostri che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = 0$$
4. Si mostri, indicando solo i passi essenziali, che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)dx = \sigma^2$$
5. Si indichi il significato che, nel contesto della teoria della Probabilità, hanno le funzioni g ed f, il parametro σ e gli integrali che si trovano nei punti 3 e 4.

A27 Matematica e fisica (ex 49/A)

Concorso ordinario 1982

Prova scritta di matematica

1. È data un'ellisse E di semiassi a, b.

A. Nella totalità dei quadrilateri inscritti in E si caratterizzino quelli di area massima; in particolare, si provi che ogni punto di E è vertice di un quadrilatero siffatto. (Si fissi un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale e si tenga presente che: a) nella totalità dei quadrilateri inscritti in una circonferenza, quelli di area massima sono i quadrati; b) ogni ellisse è la trasformata di una circonferenza in un'opportuna affinità; c) le affinità conservano i rapporti tra le aree di figure che si corrispondono).

B. Tra i quadrilateri di area massima, inscritti in E, si determinino quelli di perimetro minimo, rispettivamente massimo.

C. Sia R il rettangolo di lati 2a, 2b, circoscritto ad E; si considerino i punti in cui i lati di R sono tangenti ad E ed i punti in cui le diagonali di R intersecano E. In ciascuno di tali punti si calcoli il raggio di curvatura di E.

D. Si dimostrino i risultati a), b), c), enunciati in 1.

2. A. Si studi la quartica piana C definita da:

$$x^4 + y^4 - xy = 0.$$

B. Si mostri in particolare che la parte reale di **C** ha nell'origine un nodo con due cappi, dei quali si chiede l'area.

C. Si determinino le omografie piane (affinità) che mutano in sé la **C**.

D. Si studi il gruppo **G** delle omografie ottenute.

E. Si risolva l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{4x^3 - y}{4y^3 - x} \qquad (1)$$

F. Si verifichi che le omografie di **G** mutano in sé la famiglia delle linee integrali della **(1)**.

3. Sia dato un tetraedro regolare **T**.
A. Si calcoli il rapporto tra il volume della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta in **T**.
B. Si determini l'ampiezza degli angoli diedri determinati dagli spigoli di **T**.
C. Si descriva e si studi il gruppo **G** delle isometrie di **T** in sé.
D. Si descriva il poliedro **P** che si ottiene assumendo come vertici di **P** i centri delle facce di **T**.

E. S'inquadri lo studio del tetraedro regolare nell'ambito della teoria dei poliedri regolari.

F. Si collochi il tetraedro **T** nel primo ottante di un sistema cartesiano ortogonale, di coordinate **x**, **v**, **z**, in modo che un vertice cada nell'origine, uno spigolo sull'asse delle ascisse ed una faccia sul piano **xy** e si dica, supposta **6** la lunghezza dello spigolo, qual è la probabilità che i tre numeri risultanti da tre lanci di un dado, con facce numerate da **1** a **6**, presi nell'ordine del lancio, rappresentino le coordinate di un punto interno al tetraedro.

Prova scritta di fisica

1. I tre principi della termodinamica: loro significato e loro collocazione nell'ambito della fisica classica e moderna sia dal punto di vista macroscopico che microscopico.

2. Raggi X di lunghezza d'onda **0,0060 nm** incidono su elettroni liberi praticamente fermi, dando luogo ad effetto Compton. Dopo aver ricavato la relazione di Compton che dà la variazione della lunghezza d'onda del fotone diffuso in funzione dell'angolo di diffusione, della costante **h** di Pianck

(**h = 6,63·10^{-34}J sec**), della velocità **c** della luce (**c = 3,00·10^{8}m/sec**) e della massa a riposo **m_o** dell'elettrone (**m_o = 9,11·10^{-31} Kg**), determinare lo spettro dei raggi X diffusi (ossia entro quali valori varia la lunghezza d'onda dei raggi X diffusi), l'energia massima acquisita dagli elettroni urtati dai raggi X oltre che la corrispondente velocità $\vec{V}_1$

Si ripeta l'esame del precedente problema nel caso in cui la lunghezza d'onda dei raggi X incidenti sia **0,120 nm** e si determini anche in questo caso la velocità massima $\vec{V}_2$ acquisita dagli elettroni urtati oltre che la lunghezza d'onda di De Broglie ad essi associata.

Un pennello di tali elettroni (con velocità $\vec{V}_2$) attraversa perpendicolarmente il campo elettrico uniforme generato da due superfici piane affacciate cariche di segno opposto. Il pennello di elettroni, attraversando il campo elettrico per un tratto della lunghezza di **1,00 cm**, subisce una deviazione di **0,20** radianti. Calcolare l'intensità $\vec{E}$ del campo elettrico e la d.d.p. tra le placche nel caso in cui queste distino **5,0 mm**, sapendo che la carica dell'elettrone è **e = 1,60·10^{-19}C**.

Calcolare quale induzione $\vec{B}$ deve avere un campo magnetico perpendicolare al predetto campo elettrico $\vec{E}$ ed alla velocità $\vec{V}_2$ degli elettroni, affinché il pennello da essi costituito non subisca alcuna deviazione, quando cioè le forze dovute al campo elettrico ed al campo magnetico si compensino annullandosi.

Quale traiettoria seguirebbero gli elettroni nel caso in cui venisse meno il campo elettrico? Determinare il raggio di curvatura di tale traiettoria e, se il moto è periodico, la sua frequenza.

Se attraverso i precedenti campi elettrico e magnetico si iniettassero elettroni con velocità pari al doppio o alla metà della velocità $\vec{V}_2$ degli elettroni sopra considerati, tali elettroni seguirebbero la stessa traiettoria di quelli con velocità $\vec{V}_2$? Giustificare la risposta.

3) Nell'esperimento di Young la distanza tra le due fenditure sia **0,14 mm** e la distanza tra lo schermo con le due fenditure e lo schermo su cui si raccoglie la figura di interferenza sia di **450 cm**. Calcolare la distanza tra due frange successive se la lunghezza d'onda della luce monocromatica usata è di **633 nm**.
Calcolare quanto debbano essere larghe le due fenditure affinché nella frangia centrale di diffrazione cadano **7** frange di interferenza.
Calcolare inoltre la distanza tra due frange successive qualora l'esperimento fosse eseguito in acqua (**n = 1,333**).
Se la sorgente di luce usata ha una potenza di **0,50 mW**, quanto fotoni emette al secondo? (**h** = $\mathbf{6{,}63 \cdot 10^{-34}}$ **J·sec, c** = $\mathbf{3{,}00 \cdot 10^{8}}$ **m/sec**).

Ripetendo l'esperimento di Young con onde elettromagnetiche di frequenza **10,0 GHz**, con due fenditure distanti **12 cm** e si raccolgono le frange di interferenza su uno schermo a **60 cm** dalle doppie fenditure, si trovano frange di interferenza non equidistanti: determinare la distanza tra la frangia centrale e la prima frangia laterale e la distanza tra questa e la seconda frangia laterale.
Si tratti, in generale, il tema della diffrazione e dell'interferenza delle onde elettromagnetiche.

1984

Prova scritta di matematica

1) In un sistema di assi coordinati ortogonali **Oxyz** è data la circonferenza **C** di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

A. Si determini il luogo **L** dei punti dello spazio che proiettano la circonferenza **C** nel piano **x = 0** in parabole e si studi la totalità delle parabole così ottenute.
B. Si esamini la corrispondenza che si ottiene quando si definiscono corrispondenti due punti del luogo **L** dai quali la circonferenza **C** è proiettata nella stessa parabola.

2) In un sistema di assi coordinati ortogonali **Oxy** sono assegnati nell'ordine cinque punti

$$\mathbf{P_i = (x_i, y_i)} \qquad \mathbf{(i = 1, 2, 3, 4, 5).}$$

A. Si formuli un algoritmo, in termini delle coordinate $(\mathbf{x_i y_i})$, per stabilire se i punti $\mathbf{P_i}$ sono a tre a tre non allineati e, in questa ipotesi, si formulino successivamente, sempre in termini delle coordinate $(\mathbf{x_i, y_i})$, un algoritmo per stabilire se la poligonale $\mathbf{P_1P_2P_3P_4P_5P_/}$ è non intrecciata, un algoritmo per stabilire se la stessa poligonale delimita un poligono convesso ed un algoritmo per il calcolo dell'area **A** di tale poligono, deducendone che essa è una funzione continua delle dieci variabili $\mathbf{x_l, y_l,}$ $\mathbf{x_5, y_5}$
B. Dati in particolare i punti

$$\mathbf{P_l = (0,0),\ P_2 = (0,2),\ P_3 = (2,2),\ P_4 = (1,1),\ P_5 = (2,0),}$$

si determini il baricentro del poligono **S** delimitato dalla poligonale $\mathbf{P_1P_2P_3P_4P_5P_/}$ e si individui, mediante opportune disequazioni, la regione **R** del piano formata dai punti che vedono la figura **S** sotto un angolo di ampiezza $\geq$ **π/4** (un punto **P** appartiene alla regione **R** se non esiste alcuna regione angolare di ampiezza minore di **π/4**, con vertice in **P**, che contiene per intero la figura **S)** e si calcoli l'area di **R**.
C. Si scelgano in modo casuale due numeri interi **a** e **b**, entrambi compresi tra **1** e **100**, estremi inclusi, e si calcoli la probabilità che il punto di coordinate (**a/50**, **b/50**) sia interno al detto poligono **S**.

3) A. Si risolva l'equazione differenziale

$$(1 + X^2)^2\, yy' + 2x = 0$$

si studi la famiglia delle curve ottenute.
B. Si costruisca un algoritmo per la soluzione numerica della precedente equazione e lo si traduca eventualmente in un programma mediante uno dei linguaggi correnti.

Prova scritta di fisica

1) Le equazioni di Maxwell e le trasformazioni di Lorentz.

2) Dalla legge dei gas perfetti espressa nella forma

$$\mathbf{p\ V = 2\ n\ N\ Ç\ /\ 3}$$

(dove **p** indica la pressione del gas, **V** il volume, **n** il numero di grammomolecole, **N** il numero di Avogadro
ed Ç l'energia media delle molecole) dedurre il rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante sia per un gas monoatomico sia per un gas biatomico.
Calcolare quindi: a) la velocità quadratica media degli atomi di gas elio, se questo si trova alla temperatura di **0°C** e la corrispondente lunghezza d'onda associata di De Broglie, b) l'energia **E** necessaria per ionizzare un atomo di idrogeno (si ipotizzi l'elettrone dell'atomo di idrogeno alla distanza di **0,05 nm** dal nucleo in condizioni di equilibrio) e la temperatura a cui si debbono trovare gli atomi di idrogeno affinché la loro energia cinetica media sia **E**; c) l'incremento di entropia per una grammomolecola di idrogeno che passi da **273°K** a **742°K** sia a volume costante sia a pressione costante. Infine si determinino i livelli energetici possibili come autovalori per un atomo di elio confinato in una "scatola cubica" di lato **1 mm** (si consideri cioè un atomo di elio confinato in un cubo al cui interno il potenziale è nullo e alle pareti diviene infinito). Si calcoli quindi il valore del livello energetico più basso.
(Si ricordano i valori di alcune grandezze:
numero di Avogadro = $6{,}0.10^{23}$
costante R del gas perfetto = 8,3 J/°K
massa di grammoatomo di elio = 4,0 g
costante di Planck = $6{,}6.10^{-34}$ J.s)

3) Una sferetta di vetro del raggio di **5 mm** (densità **2,7 g/cm^3**) urta elasticamente una sferetta di acciaio di uguali dimensioni (densità **8,1 g/cm^3**). La palliria di vetro acquista la velocità con cui va ad urtare la sferetta di acciaio rotolando lungo un piano inclinato alto **29 cm** e lungo **90 cm**. Calcolare la velocità della sferetta di vetro prima e dopo l'urto e la velocità della sferetta di acciaio dopo l'urto, sapendo che la sferetta di vetro (o meglio il suo baricentro) prima dell'urto si muove lungo una retta che dista **6 mm** dal baricentro della sferetta in acciaio.
Si studi quindi la reazione:

$$\mathbf{He^4 + Be^9 \rightarrow C^{12} + n^1 + 5{,}7\ Mev}$$

e si determini la velocità massima del neutrone prodotto se la reazione avviene bombardando una targhetta di **Be** con particelle alfa accelerate per mezzo di una d.d.p. di **1.000.000 Volt**.
(Si ricordano i valori di alcune grandezze:
massa del neutrone = $1{,}67.10^{-27}$ Kg
massa del He^4 = $6{,}6.10^{-27}$ Kg

massa del $Be^9 = 1{,}5.10^{-26}$ Kg
massa del $C^{12} = 2{,}0.10^{-26}$ Kg
carica dell'elettrone = $1{,}6.10^{-19}$ C)
Si tratti quindi il tema della radioattività sia naturale che indotta.

Concorso ordinario 1990

Prova scritta di Matematica
Il candidato svolga uno dei seguenti temi:
1) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$\mathbf{y' = 1 + y / x}$$

- La funzione $\mathbf{f_n}$, definita sull'insieme **R** dei reali maggiori o uguali a zero e che assume valori in **R** sia così definita:

$$\begin{cases} f_n(x) = x(n + \log x) & per \quad ogni \quad x \quad reale > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

essendo **log x** il logaritmo naturale di **x** ed **n** un intero assoluto. Sia $\mathbf{C_n}$ il grafico della $\mathbf{f_n}$, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.
Mostrare che le funzioni $\mathbf{f_n}$, di **x** presentano un minimo; studiare l'andamento delle $\mathbf{C_n}$ per **x = 0** e per **x** tendente a più infinito. Mostrare che la curva $\mathbf{C_{n+1}}$, grafico della funzione $\mathbf{f_{n+1}(x)}$, può essere dedotto dalla curva $\mathbf{C_n}$ per mezzo di un'omotetia, di centro nell'origine e rapporto da determinare.
- Posto **n = 0** nella $\mathbf{f_n(x)}$, tracciare il grafico $\mathbf{C_o}$.
- Sia α la soluzione dell'equazione

$$\mathbf{f_o\,(t) = 1}$$

Dedurre una limitazione per la radice α.
Descrivere un algoritmo per il calcolo approssimato di α.
- Considerare la trasformazione φ_a del piano in se stesso, che ad ogni punto **M(x,y)** associa il punto **M' (x',y')** tale che

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = ax \log a + ay & essendo \quad a \quad un \quad reale > 0. \end{cases}$$

Mostrare che l'insieme Φ delle applicazioni φ_a quando a descrive l'insieme dei reali maggiori di zero, è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.
- Trattare la funzione logaritmo nel campo reale e nel campo complesso.

2) Calcolare l'integrale definito

$$S_n(K) = \int_k^{e^{-n}} x(n+\log x)\,dx$$

dove **log x** è il logaritmo naturale.
Mostrare che $\mathbf{S_n(k)}$ ammette un limite $\mathbf{U_n}$ quando **k** tende a zero. Mostrare che la successione dei valori $\mathbf{U_n}$ (con **n** numero naturale) è una progressione geometrica, di cui si troveranno il primo termine e la ragione.
- Considerare l'insieme di coniche $\mathbf{C_k}$ definite in un sistema di assi coordinati ortogonali monometrici da:

$$\mathbf{x^2 + (k + 2)\, y^2 - 2xy - 6kx = 0}$$

con **k** reale.
Determinare per quali valori di **k** si ottengono coniche degeneri.
Determinare per quali valori di **k** si ottengono iperboli aventi gli asintoti ortogonali.
Ridurre a forma canonica la conica $\mathbf{C_{-1}}$.
- Considerare un punto **P** qualunque della parabola di equazione

$$y^2 = \frac{3x}{\sqrt{2}}.$$

Considerare la normale **n** alla parabola e la perpendicolare **p** all'asse di simmetria condotte dal punto **P**: mostrare che la lunghezza del segmento determinato da **n** e da **p** sull'asse di simmetria della parabola è indipendente da **P**. - Esporre la nozione di probabilità subordinata, il teorema della probabilità composta e il teorema di Bayes, corredando l'esposizione con esempi didattici a livello di Scuola Secondaria Superiore.

3) In un sistema di assi coordinati ortogonali monometrici di origine **O** considerare il punto **A(-1,0)** e il punto **C(O,k)**, con **k** numero reale.
- Trovare l'equazione del luogo dei punti **M** ed **N** comuni alla retta **AC** e alla circonferenza di centro **C** e passante per **O**. Studiare questo luogo di punti mettendone in evidenza le singolarità.
- Considerare l'inversione per raggi vettori reciproci di centro nell'origine e raggio **r** = ÔÂ. Scrivere le equazioni di tale trasformazione geometrica ed elencarne alcune proprietà.
Trovare le equazioni delle inverse della retta **AC** e della circonferenza di centro **C** passante per **O**. Dedurre il luogo dei punti **M'** ed **N'** inversi di **M** ed **N**. Indicare inoltre una costruzione geometrica di tali punti.
Sia **M'** il punto di ascissa positiva: dimostrare che la bisettrice dell'angolo $\mathbf{A\hat{M}'O}$ ha una direzione fissa.
- Trovare il luogo geometrico dell'ortocentro **H** del triangolo **AM'O**.
- Trattare i metodi di integrazione delle equazioni differenziali.

Prova scritta di Fisica
Il candidato tratti a scelta uno dei seguenti temi:

1) Diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel.

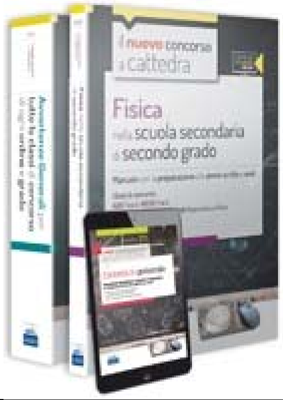
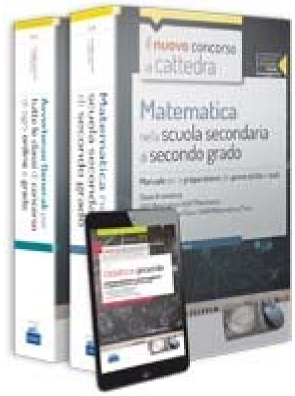
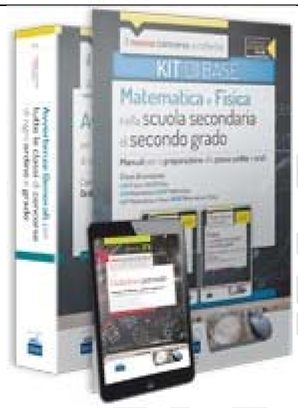
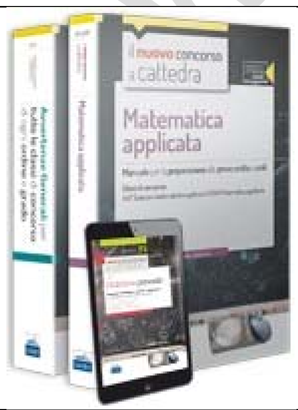
2) Un tubetto di rame (densità **8,93 g/cm^3**) del diametro esterno di **10 mm** e interno di **9 mm**, lungo **120 mm** , è appoggiato alle estremità su un binario costituito da due rotaie di rame distanti tra loro **12 cm** e inclinate di un angolo di 30° rispetto al piano di terra.
Le due rotaie sono collegate da una resistenza di **15 Ω** e poste in un campo magnetico uniforme verticale di induzione magnetica **2 Wb/m^2**.
Calcolare la velocità limite che il cilindro raggiunge rotolando sul binario: si supponga di potere trascurare la resistenza meccanica e la resistenza elettrica di cilindro e rotaie.
Calcolare quindi l'energia cinetica (di traslazione e di rotazione) acquisita dal cilindro di rame.
La velocità raggiunta dal cilindro di rame può essere misurata per mezzo della differenza in lunghezza d'onda tra un fascio di onde elettromagnetiche incidente sul cilindro e il fascio riflesso (effetto Doppler) supposto che emittente e ricevente siano in testa al binario.
Calcolare la variazione della frequenza dell'onda riflessa rispetto a quella dell'onda incidente quando il cilindro ha raggiunto la velocità limite, sapendo che le onde elettromagnetiche incidenti hanno una frequenza di **43 GHz**.
Calcolare la potenza dissipata nella resistenza elettrica posta tra le rotaie quando il cilindro si muove alla velocità limite.

3) Calcolare l'energia del campo elettrico di una sfera conduttrice di raggio **R** su cui è posta una carica **Q**.
Supposto che la massa dell'elettrone (**0,911 · 10^{-30} kg**) sia dovuta interamente all'energia del suo campo elettrico, calcolare il raggio dell'elettrone nelle ipotesi:
a) che la sua carica sia distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera;
b) che la sua carica sia distribuita uniformemente nel volume di una sfera. (carica dell'elettrone **1,60 · 10-19 Coulomb**, velocità della luce nel vuoto **3,00 · 10^8 m/s**).
Si analizzino quindi le caratteristiche dell'elettrone (massa a riposo, massa dinamica, carica elettrica, spin, ...) e si tratti come la ricerca sul comportamento dell'elettrone abbia segnato lo sviluppo della fisica nell'ultimo secolo.

Concorso riservato 1983 (art.76)

1) La divisione dei polinomi e la regola di Ruffini.
2) Equivalenza nel piano o nello spazio.
3) Punti notevoli dei triangoli.
4) Potenza di un binomio.
5) Applicazioni dell'integrale definito.
6) Lenti e prismi.
7) Il secondo principio della termodinamica.
8) Interferenza.
9) Strumenti e metodi di misura..
10) Radiazioni ionizzanti.
11) Leggi della dinamica.

Riferimenti bibliografici per una preparazione efficace

	**KIT Completo Fisica nella scuola secondaria di secondo grado** A20 Fisica Scopri i nostri prodotti
	**KIT Completo Matematica nella scuola secondaria di secondo grado** A26 Matematica Scopri i nostri prodotti
	**KIT Completo Matematica e Fisica nella scuola secondaria di secondo grado** A20 Fisica A26 Matematica A27 Matematica e Fisica Scopri i nostri prodotti
	**KIT Completo Matematica applicata** A47 Scienze matematiche applicate (A048) Scopri i nostri prodotti