Esame di matematica

Candidato : Maria Antonietta Lodato

Concorso a cattedra
2012/2013

INTEGRALE INDEFINITO

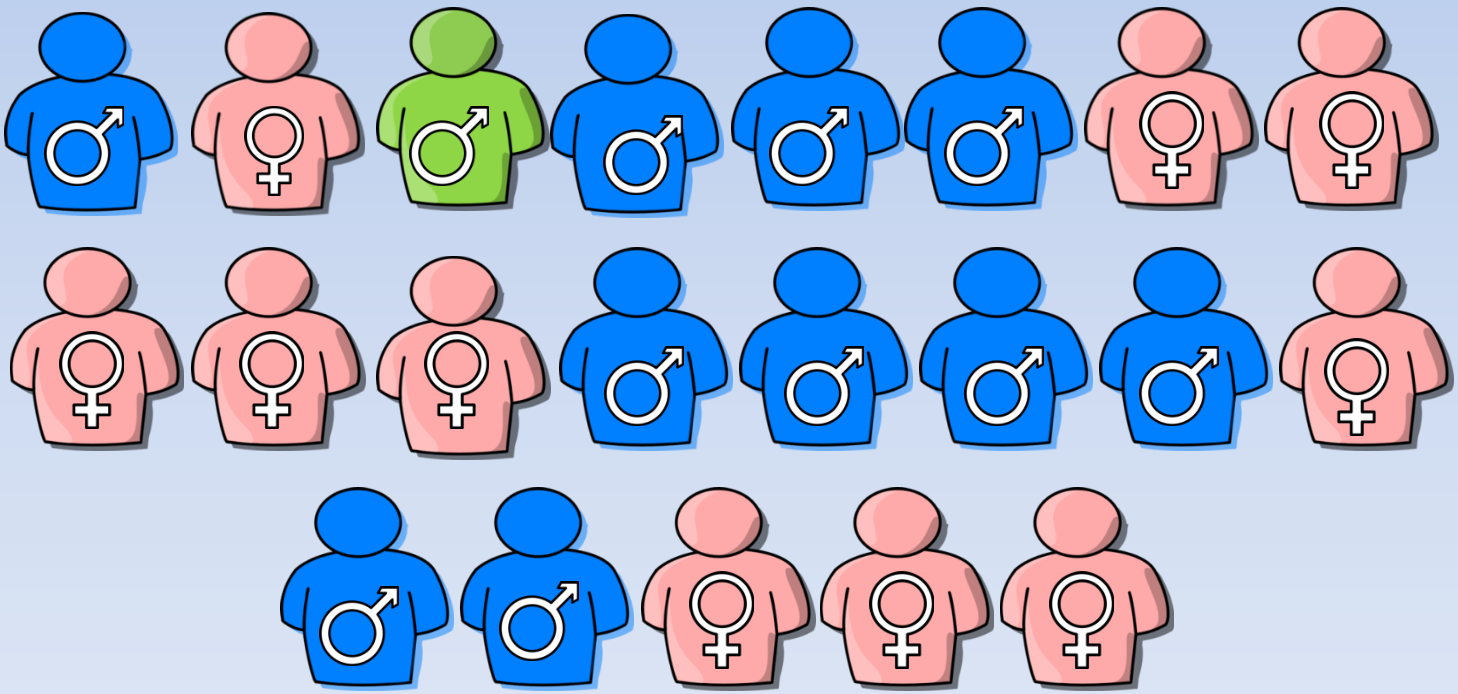
Materia : Matematica

Periodo di riferimento: 2° quadrimestre

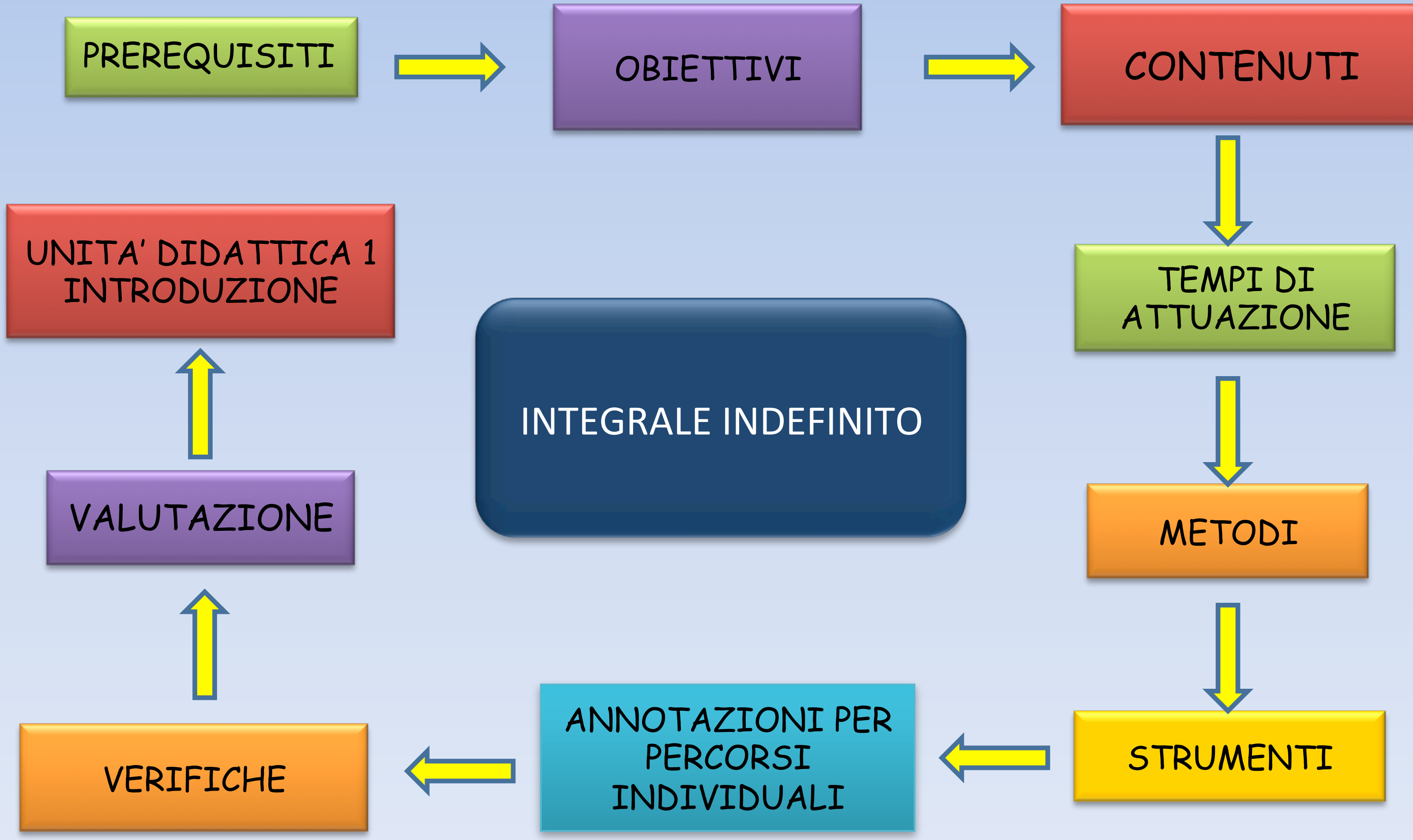
Liceo Scientifico

Classe quinta

Presentazione della classe



La classe è costituita da 21 alunni, 10 ragazze e 11 ragazzi, di cui uno con DSA


INTEGRALE INDEFINITO
PREREQUISITI
OBIETTIVI
CONTENUTI
TEMPI DI ATTUAZIONE
METODI
STRUMENTI
ANNOTAZIONI PER PERCORSI INDIVIDUALI
VERIFICHE
VALUTAZIONE
UNITA' DIDATTICA 1 INTRODUZIONE

PREREQUISITI

- Conoscere le funzioni elementari algebriche e trascendenti
- conoscere il concetto di derivata e il suo significato geometrico
- Conoscere il differenziale di una funzione
- Conoscere il teorema di Lagrange e le sue conseguenze
- Saper calcolare limiti e derivate
- Saper rappresentare graficamente le funzioni

OBIETTIVI

1. Definire l'insieme delle funzioni primitive di una funzione
2. Definire l'integrale indefinito di una funzione
3. conoscere e giustificare le formule relative agli integrali elementari
4. estendere le formule degli integrali elementari mediante la formula di derivazione delle funzioni composte
5. calcolare l'integrale di alcune classi di funzioni riconducibili, mediante decomposizione, ad integrali elementari
6. Riconoscere se per una funzione è opportuno applicare il metodo di integrazione per parti
7. integrare una funzione applicando il metodo dell'integrazione per sostituzione
8. Riconoscere se per una funzione è opportuno applicare il metodo di integrazione per sostituzione
9. scomporre una frazione algebrica in fratti semplici
10. integrare funzioni razionali fratte dopo aver stabilito il tipo_
11. distinguere tra i diversi tipi di funzioni razionali e applicare ad esse le relative formule di integrazione utilizzare un software per integrarevari tipi di funzioni

CONTENUTI

U.A 1: Introduzione

Primitive di una funzione
Definizione di integrale indefinito e suo significato geometrico
Proprietà dell'integrale indefinito

UA2: Schemi di integrazione

integrali elementari
integrali "quasi immediati"
per scomposizione
integrali di funzioni composte

UA3:Metodi di integrazione

Integrale per parti
integrale per sostituzione

UA5:Integrale di funzioni fratte

Scomposizione in fratti semplici
Formule di integrazione per i diversi tipi di funzioni razionali

TEMPI DI ATTUAZIONE

- 3 ora di lezione frontale
- 4 ora di esercitazione e/o recupero
- 2 ora di applicazioni mediante uso di softwares
- 4 ore di verifiche

METODI

- Brainstorming;
- Lezione frontale con il sussidio della LIM;
- Lavori di approfondimento di gruppo;
- Lavori di esercitazione individuale o di classe

STRUMENTI

- Libro di testo adottato dalla classe;

- Schede riassuntive con schemi dei principali metodi di integrazione;

- Materiale di riferimento e appunti;

- Presentazioni multimediali con ausilio della LIM;

- Sitografia;

- Laboratorio di informatica:

  Softwares utilizzati:
  - GeoGebra
  - Derive

Annotazioni per percorsi individuali

- **Studenti con difficoltà di apprendimento**
  - Corsi di recupero articolati secondo le unità didattiche programmate
  - Uso di strumenti e mediatori didattici sia nelle prove scritte che orali (mappe concettuali, mappe cognitive);
  - Programmare tempi più lunghi per l'esecuzione delle prove.

- **Studenti avanzati**
  - Compiti più impegnativi
  - Proposte libere
  - Partecipazione alle olimpiadi della matematica e ai percorsi di indirizzo universitario

VERIFICHE

- Verifiche orali;

- Verifiche scritte mediante prove:
  - strutturate;
  - semistrutturate;
  - Test a scelta multipla
  - Vero/falso
  - Prove a completamento

- Verifiche dei lavori realizzati in gruppo;

VALUTAZIONI

- Valutazione formativa durante le varie fasi e valutazione sommativa al termine del percorso.

- Tutti gli elaborati prodotti singolarmente o in gruppo costituiranno un fascicolo.

- Lo studente dovrà dare una valutazione (autovalutazione) sui contenuti acquisiti nell'ambito delle diverse tipologie di valutazione.

- Nella valutazione si terrà conto :
  - Del grado di conoscenza dell'argomento in termini di
    conoscenza del procedimento
    sua corretta applicazione
    uso del linguaggio appropriato
  - Capacità di rielaborazione personale

U A 1

Introduzione

Brainstorming

- In *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"* (1638), il grande fisico e matematico Galileo afferma che se un mobile scende, a partire dalla quiete, con moto uniformemente accelerato, gli spazi percorsi da esso in tempi qualsiasi stanno tra loro in *duplicata proporzione dei tempi*, ossia, diremmo noi, sono proporzionali ai quadrati dei tempi.
- Quest'ultima legge oggi si può dimostrare più facilmente se si hanno a disposizione gli strumenti dell'analisi infinitesimale…

- **…come si possono ricavare le leggi del moto di caduta di un grave utilizzando tali strumenti?**

Brainstorming

- Consideriamo il moto di un corpo in caduta libera.
  Per definizione, l'accelerazione in un istante t, cioè l'accelerazione istantanea, è:
  $$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$
  ossia la derivata della funzione velocità *v(t)* .

- Quindi indicando con *g* l'accelerazione costante di caduta di un grave, abbiamo: $v'(t) = g$

- A sua volta $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ ossia la derivata della posizione s nel tempo: $s'(t) = v(t)$

- Pertanto, nota la legge oraria s(t) del moto è possibile conoscere, attraverso l'operazione di derivazione, la velocità istante per istante. Viceversa, nota l'accelerazione a(t)=g è sempre possibile pervenire alla conoscenza della velocità e da questa alla legge oraria del moto?

Funzioni primitive di una funzione data

- …Il quesito appena posto può essere generalizzato nel modo seguente:

DEFINIZIONE: Sia f(x) una funzione continua in un intervallo I. Si dice che la funzione F(x) è una primitiva diella funzione f(x) se si verifica che:

$$F'(x)=f(x)$$

Per ogni $x \in I$

- Esempio:

1) Sia data la funzione $f(x)=k$. La funzione $F(x)= kx$ è una primitiva di f(x) essendo: $D(kx)=k \quad \forall x \in \mathbf{R}$

1) Sia data la funzione $f(x)=kx$. La funzione $F(x)= kx^2/2$ è una primitiva di f(x) essendo:

$$D(kx^2/2)=kx \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Funzioni primitive di una funzione data

la primitiva di una funzione, se esiste, non è unica. Poiché $F(x)=x^2$ ha come derivata $2x$, allora x^2 è una primitiva di $2x$. Osserviamo però che anche x^2+1, $x^2-1/8$ e in generale x^2+c hanno come derivata $2x$, quindi esistono infinite primitive di $2x$. In generale vale il seguente teorema:

TEOREMA: Se la funzione f(x) ammette in un intervallo I come primitiva la funzione F(x), allora ne ammette infinite che si ottengono tutte aggiungendo alla F(x) una qualunque costante c.

Dimostrazione: se F(x) è una primitiva di f(x), allora lo è anche la nuova funzione F(x)+c, con c costante, essendo:

$D(F(x)+c)=DF(x)+Dc=DF(x)=f(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}$

poiché la derivata di una costante è nulla.

Viceversa, se due funzioni F(x) e G(x) sono primitive della stessa funzione f(x), allora le due funzioni differiscono per una costante,

$D(F(x)-G(x))=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0 \rightarrow F(x)-G(x)=c \rightarrow F(x)=G(x)+c$

Funzioni primitive di una funzione data

Indichiamo con **P** l'*operatore* che associa alla funzione f ogni sua primitiva. L'operatore **P** inverte l'azione dell'operatore di derivazione **D**.

Ma mentre D è un operatore univoco, perché associa a ogni funzione derivabile f una sola funzione, la sua derivata, l'operatore**P** non lo è.

Come abbiamo visto, esso associa a ogni funzione un insieme di funzione: tutte le funzioni la cui derivata è f.

$$\boldsymbol{f} \to \boxed{\mathrm{D}} \to \boldsymbol{f'} \to \boxed{\mathrm{P}} \to \textit{insieme delle primitive } \{f(x)+c\}$$

L'Integrale indefinito

DEFINIZIONE: Si chiama Integrale indefinito della funzione f(x), e si indica con il simbolo:

$$\int f(x)dx$$

che si legge: "*integrale indefinito di f(x) in dx*", la totalità delle primitive della f(x)
Detta perciò F(x) una primitiva di f(x), si avrà:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

- L'operazione di ricerca delle primitive di una funzione f(x) si chiama **integrazione indefinita,** e la funzione f(x) si chiama **funzione integranda**

L’integrale indefinito

Possiamo quindi dire che l’integrazione è l’operazione inversa della derivazione

$$D\left[\int f(x)dx\right] = D[\,F(x) + c\,] = f(x)$$

Sorge il quesito: “una qualunque funzione f(x) definita in un certo intervallo, è integrabile?

La risposta è negativa.

Però è importante il seguente teorema che diamo senza dimostrazione:

TEOREMA: Ogni funzione continua in un intervallo è ivi integrabile

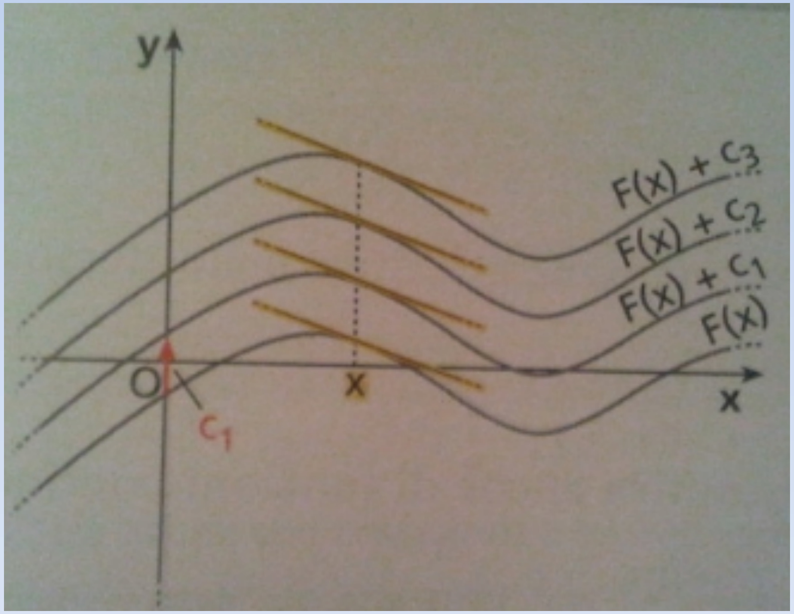
L’integrale indefinito

Si è visto che, se una funzione è derivabile, è continua, ma non è vero l’inverso; per l’integrazione si sa che ogni funzione continua è integrabile, ma non è vero l’inverso, ossia possono ammettere l’integrale indefinito anche funzioni con certe discontinuità, quindi la continuità è più restrittiva dell’integrabilità. Con un diagramma di Eulero-Venn si può schematizzare il legame fra funzioni derivabili, funzioni continue e funzioni integrabili.

È da notare che pur essendo le funzioni continue integrabili, come asserisce il teorema, non sempre è possibile esprimere l’integrale generale mediante funzioni elementari, dove per “funzioni elementari” si intendono funzioni razionali, funzioni potenze con esponenti razionali, funzioni esponenziali, logaritmiche, goniometriche.

Significato geometrico dell'integrale indefinito

L'integrale indefinito di una funzione è costituito da un insieme di funzioni i cui grafici si ottengono l'uno dall'altro mediante traslazione lungo l'asse y



Osserviamo inoltre che tutti questi grafici hanno, nei punti di uguale ascissa, tangenti parallele.

Proprietà dell'integrale indefinito

- **Prima proprietà di linearità**

L'integrale indefinito di una somma di funzioni integrabili è uguale alla somma degli integrali indefiniti delle singole funzioni:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Infatti, se deriviamo entrambi i membri, otteniamo rispettivamente:

$$D\left[\int [f(x) + g(x)]dx\right] = f(x) + g(x);$$

$$D\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right] = D\left[\int f(x)dx\right] + D\left[\int g(x)dx\right] = f(x) + g(x)$$

I due membri hanno la stessa derivata, quindi rappresentano le primitive della stessa funzione

Proprietà dell'integrale indefinito

- **Seconda proprietà di linearità**

L'integrale indefinito del prodotto di una costante per una funzione integrabile è uguale al prodotto della costante per l'integrale indefinito della funzione:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Infatti, se deriviamo entrambi i membri, otteniamo rispettivamente:

$$D\left[\int k \cdot f(x)dx\right] = k \cdot f(x)$$

$$D\left[k \cdot \int f(x)dx\right] = k\, D\left[\int f(x)dx\right] = k \cdot f(x)$$

I due membri hanno la stessa derivata, quindi rappresentano le primitive della stessa funzione

Proprietà dell'integrale indefinito

- le proprietà di linearità dell'integrale indefinito si possono esprimere in un'unica formula

$$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx$$

Si dice anche che **l'integrale è un operatore lineare**

In caduta libera

- Riprendiamo la domanda posta inizialmente…

…come si possono ricavare le leggi del moto di caduta di un grave?

Utlizzando l'integrazione indefinita.

Infatti: $v'(t) = g$

da cui: $\int v'(t)dt = \int g \cdot dt \rightarrow v(t) = g \cdot t + c$

Il corpo parte dalla quiete, quindi la v(0) è nulla:

$$v(0) = g \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$$

La legge della velocità di un corpo in caduta libera è quindi:

$$v(t) = g \cdot t$$

In caduta libera

- Abbiamo visto inoltre che: $s'(t) = v(t)$

Poiché $v(t) = g \cdot t$ si ha: $s'(t) = g \cdot t$

da cui: $\int s'(t)dt = \int g \cdot tdt \rightarrow s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + d$

Scegliendo un sistema di riferimento la cui origine è fissata nella posizione iniziale del corpo che viene lasciato cadere, s(0)=0, quindi:

$$s(0) = \frac{1}{2} g \cdot 0^2 + d = 0 \rightarrow d = 0$$

Da cui:

$$s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Abbiamo allora dimostrato, come direbbe Galileo, *"gli spazii passati essere in duplicata proporzione dei tempi, ossia come i quadrati di essi tempi"…*

La quantità di carica

Gli integrali indefiniti trovano applicazione anche in elettromagnetismo.
L'intensità di una corrente elettrica è la quantitò di carica che attraversa la sezione di un conduttore nell'unità di tempo.

Per determinare l'intensità della corrente i(t) che circola nel conduttore all'istante t, ossia l'intensità istantanea, si utilizza la derivata della funzione q(t), che rappresenta la quantità di carica al tempo t:

$$i(t)=q'(t)$$

Ne deduciamo che la quantità di carica q(t) è una primitiva dell'intensità di corrente i(t)

$$q(t) = \int i(t)dt$$

Laboratorio informatico

Ricerca della primitiva di una funzione

Come abbiamo visto, l'integrazione (cioè la ricerca della primitiva di una funzione) è l'operazione inversa della derivazione. Però quando la funzione primitiva primitiva esiste non è unica, anzi ne esistono infinite.

Ciò ha una semplice spiegazione: infatti la derivata è legata alla forma della funzione e se ad una funzione si somma una costante, tutte le ordinate restano aumentate di questa costante e la forma non varia. La funzione subisce infatti una traslazione di un vettore parallelo all'asse delle ordinate di modulo uguale alla costante.

Visualizziamo questo fatto co GeoGebra.

•Si definisce una costante c e su questa si imposta uno slider.

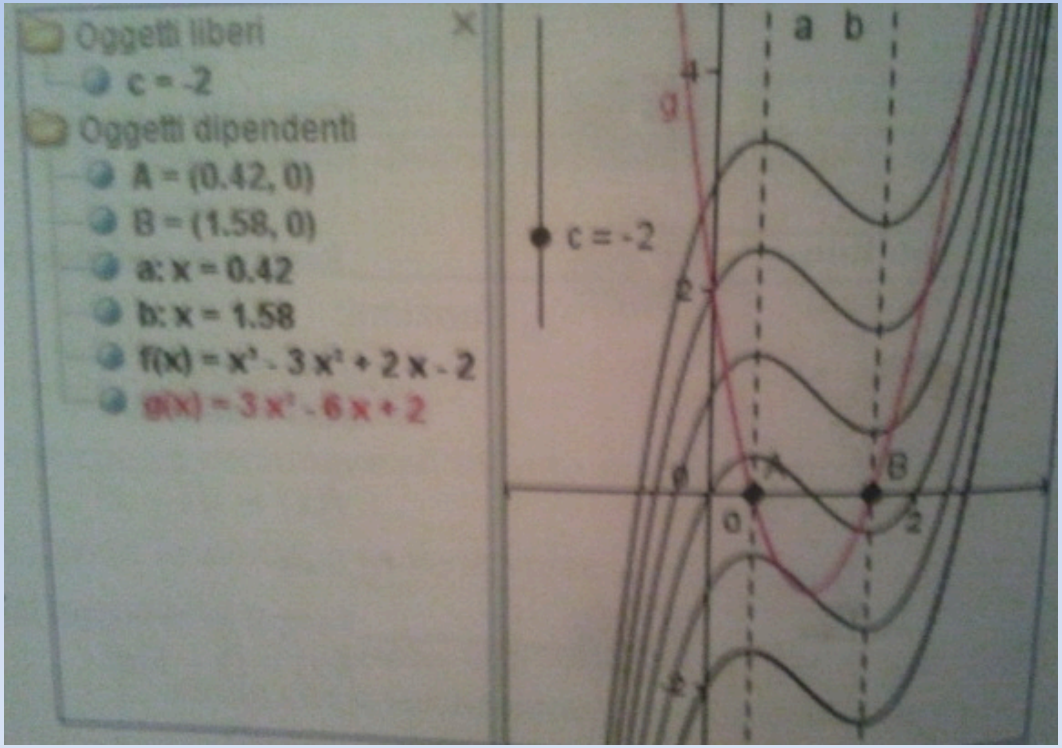
•Data la funzione :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + c$$

Si ottiene il grafico di un fascio di curve polinomiali che dipendono da c.

Ricerca della primitiva di una funzione

Allo slider è stato dato un incremento di 1 unità.
Variando il valore di c si vede che la derivata resta invariata e i massimi e i minimi si trovano sulle rette verticali che passano per i punti di intersezione della funzione derivata con l'asse x.
La funzione g(x) ha come primitive tutte le funzioni rappresentate.



GeoGebra è anche in grado di calcolare anche molti integrali indefiniti con il comando

- Integrale[funzione f]

Sia l'integrale sia la funzione vengono rappresentate nella finestra geometrica e non viene indicata nessuna costante arbitraria. Per integrare una funzione bisogna innanzi tutto scriverla nella linea di inserimento e poi si da il comando: Integrale[f]

Non esiste vento favorevole per il marinaio che non sa dove andare.

Seneca