

Concorso Personale Docente DDG 82/2012 – Classe A047-A049

Presentazione delle coniche con l'algebra delle matrici



UNITÀ DI APPRENDIMENTO

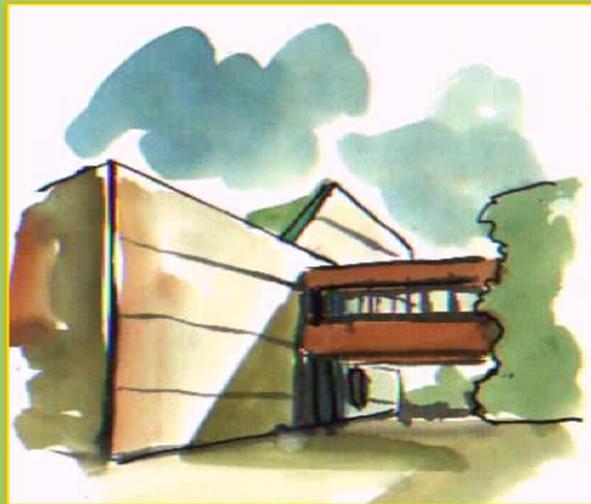


Candidato: Erasmo Modica

Tipologia di scuola e classe



Classe	Terzo Anno
Tipologia di scuola	Liceo Scientifico



Contesto classe



- Sono presenti **quattro fasce di livello**:
 - *avanzato*
 - *intermedio*
 - *base*
 - *insufficiente*
- Sono inoltre presenti due alunni con **bisogni educativi speciali**:
 - alunno con un **sindrome di Down**, certificato secondo la *legge 104/92*;
 - alunno con **disprassia** con Piano Didattico Personalizzato e per il quale si applicano i criteri della *Direttiva Ministeriale del 27 Dicembre 2013* e della *legge 270/2010*.

Contesto classe: l'alunno con sindrome di Down



- La ***Sindrome di Down***.
- Codice: ICD-10 Q 90.
- Quadro clinico con connotazioni di gravità (art. 3 comma 3, L 104/92).
- L'alunno è seguito per 18 h settimanali dal ***Docente Specializzato per le Attività di Sostegno*** (Area Scientifica).
- Segue una ***programmazione differenziata*** ai sensi dell'Art 15 comma 5 O.M. 90 del 21/5/01 approvata dal consiglio di classe e sottoscritta dai genitori.

Contesto classe: la disprassia



- Disturbo Evolutivo Specifico della Funzione Motoria (Codice **F 82** dell'*International Classification of Diseases*)
- Disturbo della coordinazione motoria
- Disturbi delle funzioni adattive
- Difficoltà di scrittura (disgrafia)
- Difficoltà di lettura legata a un deficit della coordinazione dei movimenti dello sguardo

costruttore viene assorbito dal
genio della distruzione e il tutto
viene * sventrato squartato
... ma per rimediare il guaio
na dopo secondo un sogno sepp
pre diverso

Difficoltà a rappresentarsi, programmare ed eseguire atti motori in serie, finalizzati ad un preciso scopo ed obiettivo.

Contesto classe: la disprassia

Misure dispensative



Alla luce della L.170/2010, integrata dalla DM sui BES del 27/12/2012, l'alunno viene **dispensato**:

- dal prendere appunti;
- dai tempi standard per la consegna delle prove scritte;
- dal copiare dalla lavagna;
- dall'effettuare più prove valutative in tempi ravvicinati;
- dallo studio mnemonico di formule, tabelle, definizioni;
- dalla produzione della stessa quantità di esercizi e problemi elaborati dagli altri compagni;
- dalla valutazione degli errori di trascrizione e di calcolo.

Contesto classe: la disprassia

Misure compensative



Alla luce della L.170/2010, integrata dalla D.M. sui BES del 27/12/2012, l'alunno **può utilizzare**:

- libri digitali;
- tabelle, formulari, sintesi;
- calcolatrice;
- computer, foglio di calcolo e stampante;
- risorse audio (registrazioni);
- “*lavagnate*”.

Inoltre, per l'alunno:

- saranno previste verifiche orali eventualmente concordate;
- si darà maggiore considerazione alle prove orali qualora gli scritti non fossero soddisfacenti.

Collocazione dell'argomento all'interno della struttura curricolare



- L'argomento proposto si colloca nel contesto della **geometria analitica**.
- Esso viene generalmente affrontato come argomento finale tra quelli proposti sullo studio delle coniche.

Tempi di realizzazione



Periodo	Aprile/Maggio
Numero ore	7 ore

Competenze chiave di cittadinanza (1)

(D.M. 139/2007)



Imparare ad imparare	Organizzare il proprio apprendimento in funzione del proprio metodo di studio e dei tempi stabiliti.
Progettare	Utilizzare le conoscenze apprese per definire strategie di azione.
	Verificare i risultati raggiunti.
Comunicare	Rappresentare procedure utilizzando linguaggi diversi (verbale, simbolico) e utilizzando strumenti tradizionali e non.
Collaborare e partecipare	Interagire in un gruppo.
	Contribuire all'apprendimento comune.

Competenze chiave di cittadinanza (2)

(D.M. 139/2007)



Agire in modo autonomo e responsabile	Sapersi inserire in modo attivo e consapevole nella vita sociale.
Risolvere problemi	Affrontare situazioni problematiche costruendo e verificando ipotesi.
	Valutare dati.
	Proporre soluzioni di problemi.
Individuare collegamenti e relazioni	Individuare e rappresentare collegamenti e relazioni tra fenomeni.
	Individuare analogie e differenze.
Acquisire ed interpretare l'informazione	Acquisire ed interpretare criticamente l'informazione ricevuta.

Risultati di apprendimento comuni a tutti i percorsi liceali (Indicazioni Nazionali del 26/05/2010)



Area scientifica, matematica e tecnologica	Comprendere il linguaggio formale specifico della matematica.
	Saper utilizzare le procedure tipiche del pensiero matematico.
	Utilizzare criticamente strumenti informatici e telematici nelle attività di studio e di approfondimento.
	Comprendere la valenza metodologica dell'informatica nella formalizzazione e modellizzazione dei processi complessi e nell'individuazione di procedimenti risolutivi.

Risultati di apprendimento del Liceo Scientifico (Indicazioni Nazionali del 26/05/2010)



- Comprendere i nodi fondamentali dello sviluppo del pensiero, anche in dimensione storica.
- Utilizzare in maniera appropriata il linguaggio logico-formale.
- Usare le procedure proprie della matematica per risolvere problemi di varia natura.
- Saper utilizzare strumenti di calcolo e di rappresentazione per la modellizzazione e la risoluzione di problemi.
- Saper cogliere la potenzialità delle applicazioni dei risultati scientifici nella vita quotidiana.

Prerequisiti



- Fattorizzazione di polinomi.
- Sistemi di disequazioni algebriche.
- Matrici e operazioni con le matrici.
- Determinanti e loro proprietà.
- Parabola, elementi caratteristici e sue proprietà.
- Ellisse, elementi caratteristici e sua proprietà.
- Iperbole, elementi caratteristici e sue proprietà.
- Problemi sulle coniche in forma parametrica.
- Funzioni base del foglio di calcolo.

Controllo degli apprendimenti in ingresso



Docente della classe	Conosce già i livelli di apprendimento raggiunti dai discenti, non è necessario l'accertamento
Altro docente (supplente, esterno)	Il docente somministrerà una verifica semi-strutturata su conoscenze, abilità e competenze che devono essere già acquisite per affrontare la lezione
Prerequisiti "lontani"	

Obiettivi specifici di apprendimento



- **Competenza**: dominare attivamente i concetti e i metodi della geometria analitica.
- **Conoscenze**:
 - definizione delle coniche come sezioni di un doppio cono indefinito.
 - equazione di una conica generica;
 - definizione di invarianti di una conica;
 - classificazione delle coniche.
- **Abilità**:
 - saper definire le coniche come intersezione di un cono indefinito e un piano;
 - determinare invarianti di una conica;
 - saper classificare una conica di equazione generica;
 - saper studiare la natura di una conica di equazione generica e parametrica.

Compito di prestazione autentica



- Produzione da parte degli studenti di alcune riflessioni scritte con la sintesi e la rielaborazione critica delle idee emerse (***feedback della lezione***).
- Esercizi volti a valutare il grado di comprensione di quanto trattato, in particolare verrà proposto un ***esercizio in forma parametrica***.

Apprendimento unitario da promuovere



- Lo studente, alla fine dell'unità di apprendimento, deve produrre un file multimediale nel formato scelto (testo, presentazione, video, etc.) che riporti i passi che ritiene significativi su:
 - coniche come sezioni di un cono a due falde;
 - classificazione delle coniche.

Strumenti per la valutazione autentica



- Diario informale delle attività giornaliere
- Feedback degli alunni (tramite *Google Docs*)
- Rubriche di valutazione delle varie attività.

Cosa ti è piaciuto? *

Indica quello che ti è piaciuto di quello che abbiamo fatto finora

Cosa **NON** ti è piaciuto? *

Indica quello che non ti è piaciuto

Mediazione didattica: metodi

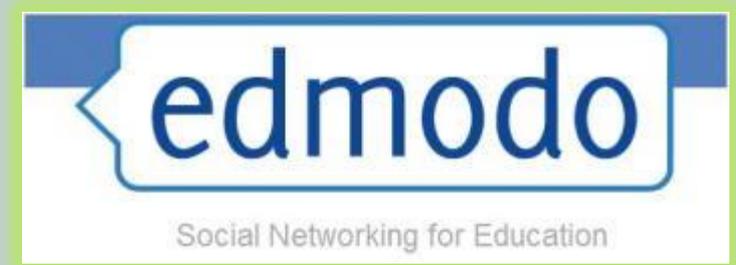


- Attività laboratoriali
- Brainstorming
- Peer-education
- Problem solving
- Lezione interattiva

Mediazione didattica: strumenti



- Libro di testo
- LIM
- Risorse digitali
- Foglio di calcolo
- Social network per la didattica (***EDMODO***)



Mediazione didattica: fasi di lavoro



Fase	Contenuto	Metodi	Ore
1	<i>Verifica dei prerequisiti</i>	Prova semi-strutturata	1
2	<i>Le sezioni coniche</i>	Lezione interattiva Laboratorio Webquest	1
3	<i>Classificazione delle coniche</i>	Lezione interattiva Cooperative learning Problem solving	2
4	<i>Le coniche con Excel</i>	Attività laboratoriale	2
5	<i>Verifica sommativa</i>	Prova semi-strutturata	1

Prima fase: verifica dei prerequisiti

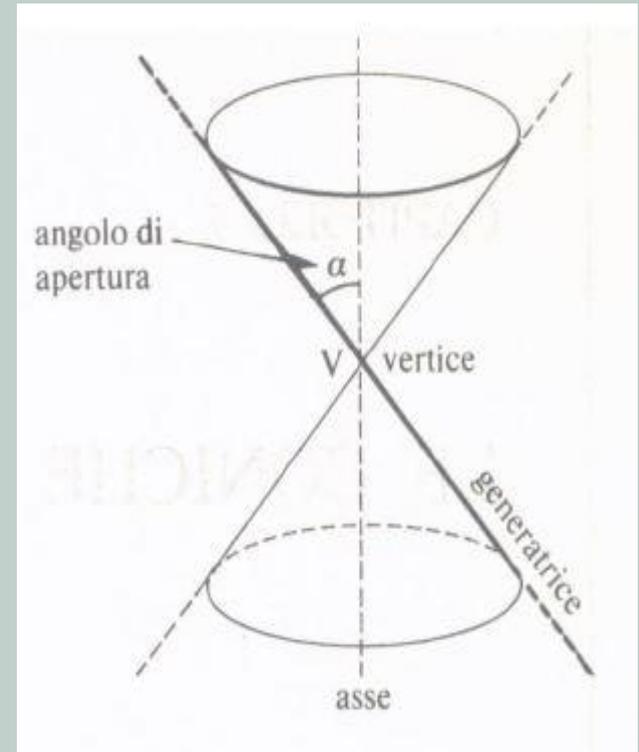


- Esercizi sul calcolo dei determinanti del tipo:
 - ✦ Calcolare il determinante delle seguenti matrici:
 - $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
 - $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Esercizi parametrici sulle coniche studiate del tipo:
 - ✦ Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione:
$$\frac{x^2}{3k + 1} - \frac{y^2}{9 - k^2} = 1$$
 rappresenta:
 - un'iperbole
 - un'ellisse.

Seconda fase



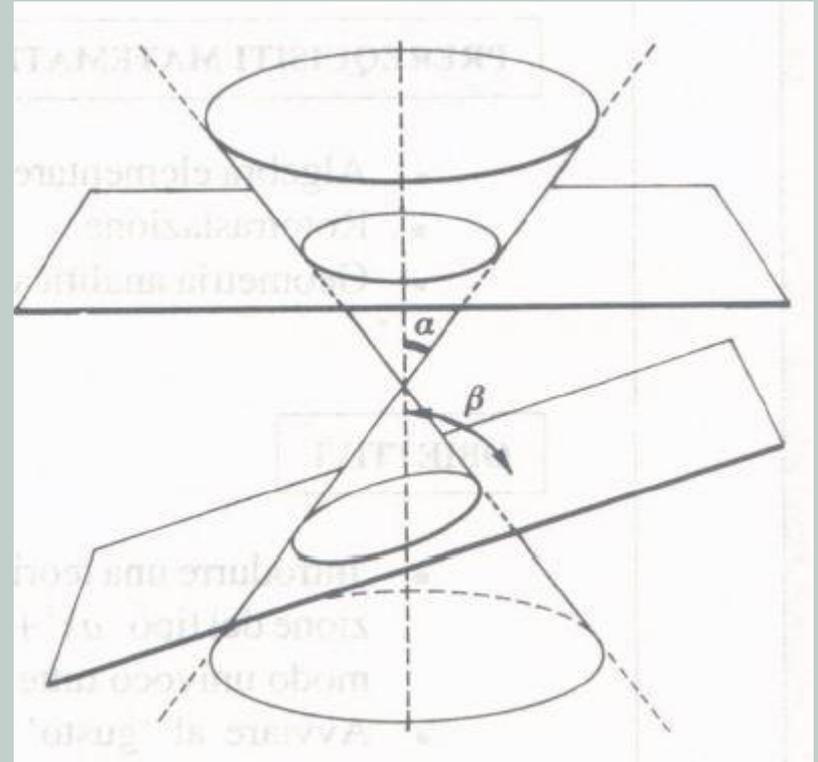
- L'insegnante:
 - definisce una **superficie conica indefinita** come la superficie generata da una retta in una rotazione completa intorno ad un'altra retta che la interseca in un punto V;
 - definisce la **semiapertura** come l'ampiezza degli angoli acuti formati dalle due rette



Seconda fase



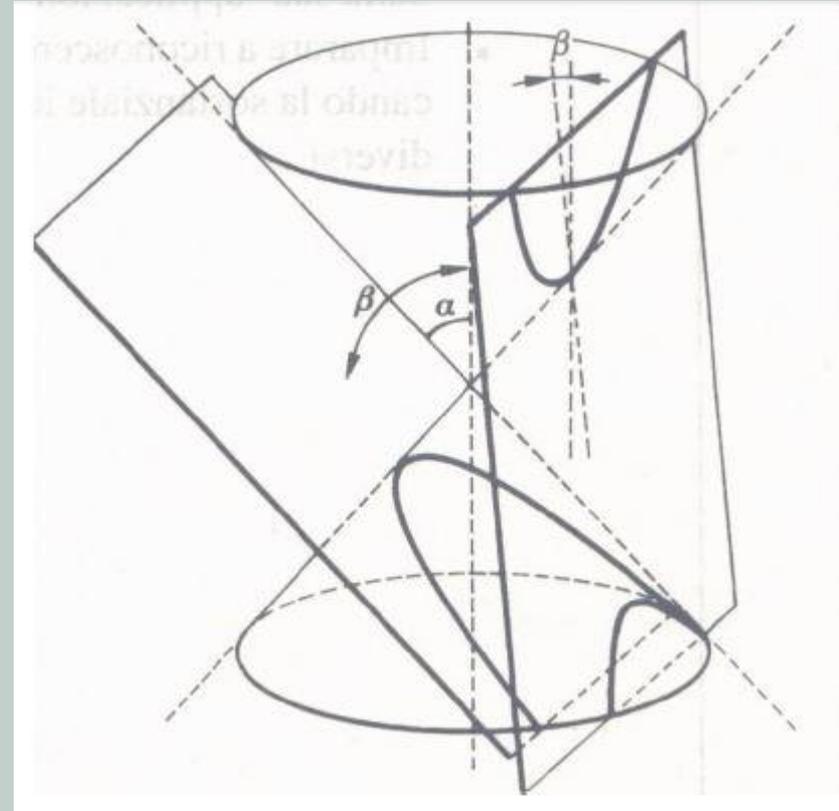
- L'insegnante:
 - mostra che la sezione che si ottiene intersecando la superficie conica con un piano che forma con l'asse un angolo minore di quello di apertura, è un **ellisse**;
 - fa notare che se il piano è perpendicolare all'asse, allora si forma una **circonferenza**.



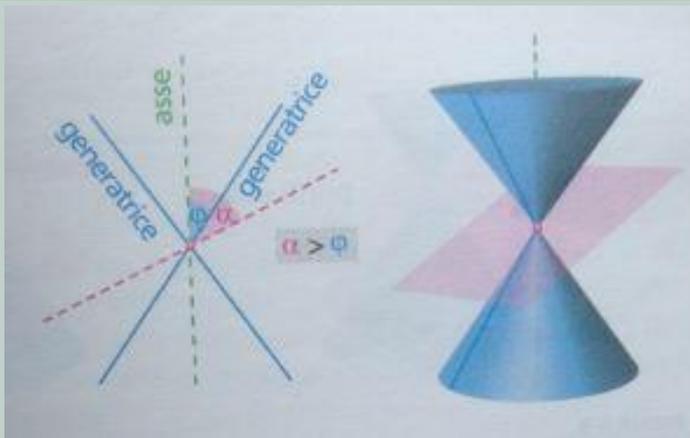
Seconda fase



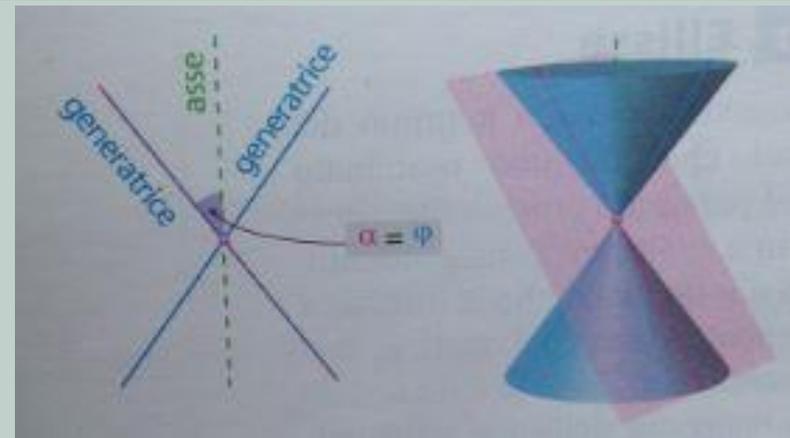
- L'insegnante:
 - mostra che la sezione che si ottiene intersecando la superficie conica con un piano che forma con l'asse un angolo maggiore di quello di apertura, è un **iperbole**;
 - Mostra che la sezione che si ottiene intersecando la superficie conica con un piano che forma con l'asse un angolo uguale a quello di apertura è una **circonferenza**.



Seconda fase

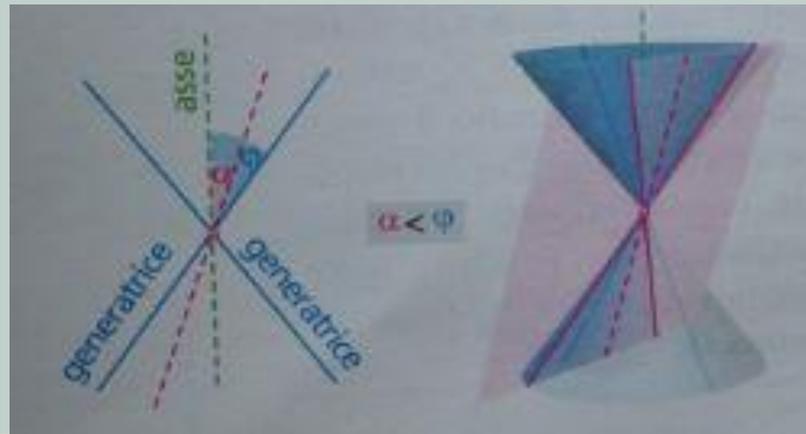


Ellisse degenera: singolo punto



Parabola degenera: retta generatrice (di contatto)

Iperbole degenera: coppia di generatrici



Prima fase: un po' di storia...



- Le coniche furono studiate dal matematico **Apollonio di Perga** (262 a.C. – 190 a.C.) sotto la guida di Euclide.
- L'opera di Apollonio dedicata alle coniche si chiama **Sezioni Coniche** (230 a.C.), dove raccolse 487.
- L'opera di Apollonio fu commentata dalla prima donna matematica della storia: **Ipazia** (370 – 415).
- Le sezioni coniche furono riprese da **Descartes** (1596 – 1650) nella sua **Geometria** (1637), in cui diede la loro prima trattazione con i metodi propri della geometria analitica.

Prima fase: alunno con disabilità



- Impugnare il compasso, aprirlo ad un' ampiezza di 10 cm misurandola sulla riga, fissarlo in un punto che chiamerai centro e indicherai con una lettera maiuscola per esempio la C. Poggiare la punta con la mina sul foglio e tenendo il busto fermo, ruotare solo il polso, lentamente.
- La figura ottenuta si chiama ***circonferenza***.
- Ripetere l'esercizio con diverse ampiezze a piacere, $< 0 >$ di 10 cm.
- Le circonferenza sono tutte uguali?
- Ci sono circonferenze più piccole e circonferenze più grandi della prima?
- Colora, solo il "bordo" delle circonferenze, in rosso quelle più piccole della prima e in verde quelle più grandi.
- Che cosa hanno di diverso?

Terza fase



- L'insegnante propone sulla LIM la seguente equazione:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 3x - y + 4 = 0$$

- Cosa rappresenta nel piano cartesiano?
- Dopo le risposte degli allievi propone l'equazione:

$$\mathbf{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$$

Terza fase: matrici associate a una conica



- L'insegnante definisce la matrice caratteristica della conica:

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

- Considera la matrice subordinata:

$$A' = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

Terza fase: classificazione



Cosa vuol dire classificare?

Determinare un metodo che permetta, a partire dalle matrici presentate, di stabilire quale conica viene rappresentata mediante l'equazione data.

L'insegnante introduce quindi le tre quantità:

- $I_1 = \text{Tr}(A') = a + b$ (invariante lineare)
- $I_2 = \det(A')$ (invariante quadratico)
- $I_3 = \det(A)$ (invariante cubico)

Terza fase: coniche non degeneri



$$I_3 \neq 0$$

$I_2 > 0$	$ I_1 \cdot I_3 < 0$	Ellisse reale
	$ I_1 \cdot I_3 > 0$	Ellisse immaginaria
$I_2 < 0$	$ I_1 \neq 0$	Iperbole non equilatera
	$ I_1 = 0$	Iperbole equilatera
$I_2 = 0$	Parabola	

Terza fase: coniche degeneri



$$I_3 = 0$$

$I_2 > 0$	Ellisse degenera (un punto)	
$I_2 < 0$	$I_1 \neq 0$	Iperbole degenera (due rette reali, incidenti e non perpendicolari)
	$I_1 = 0$	Iperbole degenera (due rette reali, incidenti e perpendicolari)
$I_2 = 0$	Parabola degenera (retta doppia reale)	

Terza fase: tornando all'inizio della lezione...



$$x^2 + 2xy + y^2 - 3x - y + 4 = 0$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 4 \end{pmatrix}$ e $I_3 = -1 < 0$
- $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I_2 = 0$

Il docente invita ora gli studenti a ricercare nella tabella presentata il tipo di conica.

Questi scopriranno che è una **parabola**.

Terza fase: un altro esempio...



$$x^2 - 4y^2 + 2x + 1 = 0$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I_3 = 0$
- $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ e $I_2 = -4 < 0$
- $I_1 = -3$

Il docente invita ora gli studenti a ricercare nella tabella presentata il tipo di conica.

Questi scopriranno che è un'**iperbole degenera** (costituita da due rette incidenti non perpendicolari).

Terza fase: quali rette?



- Il docente invita gli studenti a fattorizzare il polinomio che rappresenta la conica...
- Si avrà:

$$(x^2 + 2x + 1) - 4y^2 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 4y^2 = 0$$

$$(x + 1 - 2y)(x + 1 + 2y) = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Terza fase



- Il docente pone le seguenti domande per indurre alla riflessione.
 - Quale è il ruolo dell'invariante cubico?
 - Qual è il ruolo dell'invariante quadratico?
 - Qual è il ruolo dell'invariante lineare?

Terza fase: esercitazione



- Viene fornita una scheda con esercizi del tipo:
 - ✦ Classificare la seguente conica:

$$2x^2 - 3y^2 + 2xy - x + 1 = 0$$

- ✦ Studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la natura della seguente conica:

$$(1 - k)x^2 - 3y^2 - 2xy + x + 2y + k = 0$$

Terza fase: alunno con disabilità



- L'alunno disegna la circonferenza su un cartellone utilizzando gli strumenti del giardiniere (spago lungo 10 cm, pennarelli colorati).
- Si fanno legare gli estremi della cordicella lunga 28 cm a due pennarelli, si fanno fissare nel polistirolo alla distanza di 18 cm. Si fa girare un pennarello rosso. La curva disegnata è un'ellisse (***metodo del giardiniere***).
- Hai scoperto la proprietà dell'ellisse secondo cui la somma delle distanze di un punto dell'ellisse dai due fuochi è sempre la stessa.

Quarta fase: laboratorio di informatica (2)



Conica non degenera =SE(O(G15>0;G15<0);VERO)			
ellisse reale =SE(E(I9;G13>0;G11*G15<0);VERO)	ellisse immaginaria =SE(E(I9;G13>0;G11*G15>0);VERO)	iperbole non equilatera =SE(E(I9;G13<0;O(G11<0;G11>0));VERO)	iperbole equilatera =SE(E(I9;G13<0;NON(O(G11<0;G11>0)));VERO)
Conica degenera =SE(NON(O(G15>0;G15<0));VERO)			
punto =SE(E(I14;G13>0);VERO)	rette incidenti ma non perpendicolari =SE(E(I14;G13<0;O(G11<0;G11>0));VERO)	rette incidenti e perpendicolari =SE(E(I14;G13<0;NON(O(G11>0;G11<0)));VERO)	rette parallele o coincidenti =SE(E(I14;NON(O(G13<0;G13>0)));VERO)

Controllo degli apprendimenti in uscita



E1. Classificare le seguenti coniche:

- $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 3x - y + 1 = 0$
- $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 22y + 39 = 0$
- $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0.$

E2. Scrivere l'equazione della conica degenera costituita dalla coppia di rette di equazioni $x + 2y - 1 = 0$ e $y = 2x - 1$. Di che tipo di conica si tratta?

E3. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ stabilire che tipo di conica rappresenta la seguente equazione:

$$2x^2 - ky^2 + 2x - ky + 1 = 0$$

E4. Data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 4 \\ -9 & 4 & 34 \end{pmatrix}$$

stabilire di che conica si tratta e ricavare la sua equazione cartesiana.

Rubrica per la valutazione delle attività di laboratorio

Dimensioni-Livelli	Non accettabile (1)	Minimo accettabile (2)	Medio (3)	Alto (4)	Totale
Partecipazione	L'alunno solo dietro continua sollecitazione.	L'alunno partecipa spontaneamente alle attività proposte, ma necessita di frequenti richiami per seguire le indicazioni e i modelli operativi forniti.	L'alunno partecipa spontaneamente e con interesse alle attività proposte. Segue le indicazioni e i modelli forniti.	L'alunno partecipa spontaneamente e con alto interesse. Segue le indicazioni e i modelli operativi forniti ed è in grado di rielaborare in modo personale e creativo.	
Capacità di lavorare in coppia/piccolo gruppo	L'alunno rifiuta il lavoro in coppia/gruppo, non contribuisce, non si assume responsabilità, intralciando il lavoro dei compagni.	L'alunno coopera e contribuisce solo se richiamato a farlo. Si assume poche responsabilità e svolge il lavoro assegnato solo se sollecitato.	L'alunno collabora con i compagni. Contribuisce al lavoro, si assume le responsabilità richieste e svolge i compiti assegnati.	L'alunno coopera e contribuisce in modo attivo e con competenza. Si assume le responsabilità richieste e svolge anche un ruolo di guida e aiuto per i compagni.	
Uso del tempo e delle informazioni ricevute (per la realizzazione del compito)	L'alunno è incapace di terminare il lavoro assegnato nel tempo previsto perché non utilizza le informazioni ricevute.	L'alunno necessita di tempo supplementare e di una guida per completare il lavoro Assegnato.	L'alunno è in grado di terminare in modo autonomo il lavoro nel tempo assegnato.	L'alunno usa in modo eccellente il tempo assegnato e le informazioni Ricevute.	
Qualità del prodotto realizzato (schede, relazioni, questionari...)	L'alunno non svolge il compito assegnato o la realizzazione è totalmente inappropriata.	La qualità del prodotto realizzato necessita di miglioramenti.	La qualità del prodotto è buona, ma non tutte le parti del compito sono completate esaurientemente.	Il compito è realizzato in modo accurato, con originalità e contributi personali.	
Correttezza dei contenuti negli elaborati prodotti	Gli elaborati prodotti non sono corretti e/o sono totalmente incongruenti – incomprensibili.	Negli elaborati prodotti sono presenti diversi errori e/o inesattezze nelle informazioni riportate. Le idee individuabili non sono adeguatamente sviluppate.	Negli elaborati si rilevano alcuni errori non fondamentali nelle informazioni riportate. Le idee contenute sono generalmente chiare.	Negli elaborati prodotti tutti i fatti/contenuti sono precisi ed espliciti. Le idee contenute sono chiare, ben messe a fuoco ed espresse in modo originale.	

Valutazione delle prove orali

VOTO	LIVELLI EQF	CONOSCENZE	COMPETENZE DISCIPLINARI		
			ESPOSIZIONE	COMPRESIONE APPLICAZIONE	ANALISI E SINTESI
1-2 assolutamente negativo	1 Sotto la costante e diretta supervisione	totalmente assenti	incapace di comunicare i contenuti richiesti	totalmente assente	non coglie assolutamente l'ordine dei dati né stabilisce gerarchie
3 negativo		contraddistinte da lacune talmente diffuse da presentare scarsissimi elementi valutabili	del tutto confusa	del tutto scorretta	non ordina i dati e ne confonde gli elementi costitutivi
4 insufficiente	2 Dietro precise indicazioni	carenti nei dati essenziali per lacune molto ampie	inefficace e priva di elementi di organizzazione	molto faticosa; limitata a qualche singolo aspetto isolato e marginale	appiattisce i dati in modo indifferenziato; confonde i dati essenziali con gli aspetti accessori; non perviene ad analisi e sintesi accettabili
5 mediocre		incomplete rispetto ai contenuti minimi fissati per la disciplina nel coordinamento d'Istituto	carente sul piano lessicale e/o sintatticamente stentata	insicura e parziale	ordina i dati in modo confuso; coglie solo parzialmente i nessi problematici e opera analisi e sintesi non sempre adeguate
6 sufficiente	3 Operando in modo autonomo, adattandosi al contesto	non sempre complete di taglio prevalentemente mnemonico, ma pertinenti e tali da consentire la comprensione dei contenuti fondamentali stabiliti	accettabile sul piano lessicale e sintattico e capace di comunicare i contenuti anche se in modo superficiale	complessivamente corretta la comprensione; lenta e meccanica l'applicazione	ordina i dati e coglie i nessi in modo elementare; riproduce analisi e sintesi desunte dagli strumenti didattici utilizzati
7 discreto	4 In piena autonomia fronteggiando anche compiti inediti	pressoché complete, anche se di tipo prevalentemente descrittivo	corretta, ordinata, anche se non sempre specifica nel lessico	semplice e lineare	ordina i dati in modo chiaro; stabilisce gerarchie coerenti; imposta analisi e sintesi guidate
8 buono		complete e puntuali	chiara, scorrevole, con lessico specifico	corretta e consapevole	ordina i dati con sicurezza e coglie i nuclei problematici; imposta analisi e sintesi in modo autonomo
9 ottimo	5	approfondite e ampliate	autonoma e ricca sul piano lessicale e sintattico	autonoma, completa e rigorosa	stabilisce con agilità relazioni e confronti; analizza con precisione e sintetizza efficacemente; inserisce elementi di valutazione caratterizzati da decisa autonomia
10 eccellente		largamente approfondite, ricche di apporti personali	elegante e creativa con articolazione dei diversi registri linguistici	profonda e capace di contributi personali	stabilisce relazioni complesse, anche di tipo interdisciplinare; analizza in modo acuto e originale; è in grado di compiere valutazioni critiche del tutto autonome